

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P5-90-4

Л.В.Авдеев, П.Б.Иванов*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОСПРИЯТИЯ
ЗВУКОРЯДОВ

Направлено в журнал "Mathematical Biosciences"

*Филиал Института атомной энергии им. И.В.Курчатова,
Троицк

1990

Иерархический подход к формированию масштабных структур в человеческом восприятии применяется к музыкальным звукорядам. Модель объясняет известные явления музыкальной практики и обнаруживает ряд новых аспектов, в частности, предсказывает новую 19-тоновую универсальную музыкальную систему. Формула для информационной меры различия вероятностных распределений применяется к построению количественной оценки противоречия между составными тонами. Получаемая таким путем функция диссонирования имеет ряд минимумов, соответствующих ступеням музыкального звукоряда. Вводится также функция диссонанса, которая выявляет звукоряд как множество зон. Стационарность по отношению к нелинейным преобразованиям и максимальная регулярность являются критериями отбора наилучших звукорядов. Прослеживается историческое развитие от простых ко все более сложным звукорядам. Формантная структура внутреннего тембра характеризует стабильность локальных иерархических структур. Описываются три типа лабильности: гармоническая, ладовая и хроматическая. Звукоряд как локально подвижная иерархия зонных структур может по-разному разворачиваться, формируя звуковысотный контекст. Анализ функций диссонирования указывает возможные пути разрешения диссонансов /тяготения/ и выявляет художественные последствия любого мелодического хода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1990

Перевод авторов

A hierarchical approach to scale formation in human perception is applied to musical scales. The model explains the known musical phenomena and discovers a lot of novel features, particularly, predicts a new universal 19-tone musical system. A formula for the information difference between two probability distributions is employed to construct a numerical estimate of a contradiction between two compound tones. The discordance function obtained in this way features a number of minima corresponding to the degrees of a musical scale. A dissonance function is introduced, which reveals the scale as a set of zones. Stationarity under nonlinear transformations and maximum regularity provide the numerical criteria for selecting the preferable scales. The historical development from simple to ever more complex scales is thus traced. The formant structure of the internal timbre pattern characterizes the stability of local hierarchical structures. Harmonic, modal, and chromatic types of scale lability are described. Musical scale as a movable hierarchy of zone structures unfolds itself in various ways, forming the musical context. The analysis of the discordance functions indicates the ways of releasing the tensions and shows the musical consequences of any melodic move.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1990

ВВЕДЕНИЕ

Развиваемая ниже иерархическая модель формирования звукорядов в европейской музыкальной традиции основывается на следующих фактах.

1. Нет непосредственной связи между физическими свойствами звука и воспринятой интонацией /1, 2/. Скорее человек строит внутреннюю модель внешнего звука, а затем пытается уложить в неё всё, что он слышит. Именно поэтому мы говорим о восприятии, что подразумевает кроме ощущения также внутреннее представление звука.

2. Человек никогда не может точно определить высоту звука, и реальное интонирование носит зонный характер /3, 4/. Соответственно, восприятие тонов должно отражать их "размытость".

3. Исторически, простое различение звуков предшествует понятию интервала, которое формируется лишь спустя некоторое время /5/. Квинта и октава занимают своё место в музыке довольно поздно, так что вряд ли можно серьёзно говорить о комбинаторном происхождении ладов.

4. Музыкальный слух развивается в направлении различения всё более высоких обертонов и более детального восприятия тембра /6/.

5. Любая человеческая деятельность является иерархически организованной /7—9/, включая перцептивную деятельность.

6. Такие музыкальные явления как консонанс и диссонанс, тяготения, неустойчивость и устойчивость возникают лишь в определённом контексте /6/. Поэтому для теории очень важно иметь формализованное понятие музыкального контекста.

Здесь мы следуем подходу Марра /10/, полагая, что детальное изучение механизмов восприятия мало даёт для понимания самого восприятия. Скорее построение моделей более высокого уровня позволяет связать воедино физиологические данные. Можно отметить также непрерывно усиливающееся проникновение теории информации в психофизику восприятия /7, 8, 11/. Естественно, мы всегда учитывали известные физиологические и психологические данные о слухе. Весьма обстоятельные обзоры можно найти в книгах /1, 2/.

В общих чертах, модель, объединяющая все эти соображения, развивается следующим образом.

Низкий уровень восприятия составляют музыкальные тоны (абстрагированные от шумов, фазовых эффектов и т.п., которые несущественны для теории звуковсотности). Любой тон представляется своим гармоническим рядом, то есть последовательностью обертонов, каждый из которых характеризуется амплитудой t_n ($n=1...N$). Набор амплитуд мы называем внутренним тембром. Отдельная гармоника описывается вероятностным распределением с дисперсией σ . Поскольку N , t_n и σ составляют внутреннее представление тона, можно считать их одинаковыми для всех тонов и рассматривать как параметры текущей настройки слуха.

В процессе слухового восприятия человек устанавливает соотношения между тонами. Так как наша модель имеет дело с вероятностными распределениями, в разделе 1 мы выводим формулу для количества информации в одном распределении по отношению к другому. Это правило применяется в разделе 2 к паре изолированных гармоник музыкальных тонов, чтобы найти меру их "диссонирования", характеризующую противоречие между двумя звуками, трудность объединения их в общую систему тонов. Предполагая, что составные звуки взаимодействуют через парные отношения между отдельными гармониками пропорционально амплитудам гармоник, мы определяем диссонирование для двух сложных тонов в зависимости от разности высот их основных гармоник (раздел 3). При фиксированной точке отсчёта можно говорить о функции диссонирования — распределении диссонирования по отношению к тонике.

На следующем уровне воспринимаются различные структуры, составленные из наименее диссонирующих тонов. Поскольку не все тембры равнозначны с точки зрения отчётливого восприятия структур, мы ищем параметры, выделяющие наилучшие звукоряды. Требование минимального искажения тембра под действием нелинейных преобразований, сопровождающих обработку любого образа в человеческом мозге, приводит к t -критерию

стационарности (раздел 4). Настройка восприятия на ведущий ритм в функции диссонирования, возникающая из требования регулярности, формирует внутренние тембры, которые мы называем оптимальными (раздел 5). Наиболее подходящими для образования звукорядов являются стационарные оптимальные тембры.

Раздел 6 показывает, как соотношение функции диссонирования с неким локально определённым средним уровнем порождает набор зон, представляющих на данном уровне звукоряд. Тем самым учитывается зонный характер звуковместности.

Расчёты при помощи ЭВМ позволили нам найти последовательность стационарных оптимальных тембров. Свойства некоторых соответствующих звукорядов хорошо известны в теории музыки. Таким образом, мы можем понять, как картина тембра связана со свойствами звукоряда, и с высокой степенью уверенности описать некоторые новые звукоряды, до сих пор не имевшие широкого применения в музыкальной практике. В частности, вводятся понятие стабильности звукорядов и описываются три типа лабильности — гармоническая, ладовая и хроматическая (раздел 7). Стабильные стационарные регулярные звукоряды более всего подходят для универсального применения. Хорошо известным примером является 12-ступенный звукоряд. Другая универсальная система — с 19-ю тонами на октаву — упоминается в теоретических рассуждениях /12-15/, однако лишь наша модель может предсказать основные черты 19-тоновой музыки.

Даже при выборе какого-то одного оптимального звукоряда человек может воспринимать различные его подструктуры, настраивая восприятие на разные ритмы, содержащиеся в спектре функции диссонирования, соответственно меняя дисперсию σ . Возникающая таким путём локальная иерархическая система вложений звукорядов представляет звуковисотный контекст и позволяет естественным образом подняться со звукорядного на следующие уровни музыкального восприятия, такие как мелодика, тональность, гармония (раздел 8).

Таким образом, наша модель описывает всё многообразие музыкальных явлений, относящихся к звукорядности, проясняет некоторые известные закономерности и раскрывает новые перспективы развития звуковой основы музыки.

1. ИНФОРМАЦИОННАЯ МЕРА ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть у нас есть случайная величина x , принимающая значения в интервале $a \leq x < b$ со всюду положительной гладкой функцией распределения $f_0(x)$. нас интересует количество информации, которое будет получено, если в результате измерений будет обнаружено новое распределение $f_1(x)$. Согласно классическому определению, информация I , сообщаемая некоторым событием, выражается через априорную вероятность события:

$$I = -\ln p, \quad 0 < p \leq 1. \quad (1.1)$$

Чтобы узнать функцию распределения, мы должны выполнить последовательность из большого числа независимых измерений нашей случайной величины. Разобьём интервал $[a, b]$ на m небольших частей

$$x_j - d_j/2 \leq x < x_j + d_j/2, \quad (j=1 \dots m); \quad (1.2)$$

$$a = x_1 - d_1/2, \quad b = x_m + d_m/2.$$

Пусть число значений x , которые попали в j -й интервал (1.2) после n испытаний, равно n_j . Это соответствует тому, что апостериорное распределение f_1 оказалось равным

$$f_1(x_j) d_j = n_j/n \quad (1.3)$$

с точностью до поправок порядка $O(d_j^2)$ при естественной нормировке

$$\sum_{j=1}^m f_j(x_j) d_j = 1. \quad (1.4)$$

Теперь мы вычислим вероятность такой совокупности элементарных событий $\{n_j\}^m$, пользуясь априорным распределением $f_0(x)$,

$$p = n! \prod_{j=1}^m \left\{ [f_0(x_j) d_j]^{n_j} / n_j! \right\}. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.1), можно рассчитать информацию

$$I = \sum_{j=1}^m \left\{ \ln(n_j!) - n_j \ln[f_0(x_j) d_j] \right\} - \ln(n!). \quad (1.6)$$

Мы хотим перейти к непрерывному пределу $m \rightarrow \infty$, $d_j \rightarrow 0$. Однако, чтобы получить осмысленный результат для функции распределения, нам надо стремиться n к бесконечности значительно быстрее, с тем чтобы обеспечить $n_j \rightarrow \infty$ для каждого j . Поэтому мы полагаем

$$m = O(n^{1/2}), \quad d_j = O(n^{-1/2}), \quad n_j = O(n^{1/2}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

Теперь можно воспользоваться формулой Стирлинга для факториалов

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n \exp(-n) [1 + O(1/n)]. \quad (1.8)$$

С помощью (1.8), (1.3) и (1.4) перепишем (1.6) с точностью до $O(1)$:

$$I = n \sum_{j=1}^m f_j(x_j) d_j \ln[f_j(x_j) / f_0(x_j)] - \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \ln(2\pi n_j). \quad (1.9)$$

В пределе (1.7) последняя сумма в (1.9) не превосходит $O(n^{1/2} \ln n)$, следовательно, два последних члена становятся пренебрежимо малыми по сравнению с первым. Теперь, заменяя сумму интегралом, к которому она стремится, мы приходим к окончательной формуле

$$I/n \rightarrow \Delta(f_1 | f_0) = \int_a^b dx f_1(x) \ln[f_1(x) / f_0(x)]. \quad (1.10)$$

Несколько менее строго выражение (1.10) было независимо получено в работе /16/.

Нет ничего неожиданного в том, что общая информация бесконечна; однако удельная информация на одно измерение имеет конечный предел (1.10). Мы видим, что $\Delta(f_0 | f_0) = 0$: если распределение не меняется, то в главном порядке $I=0$, то есть вероятность получить $f_1 = f_0$ сравнительно недалеко от единицы. В любом другом случае, как следует из формулы (1.1), $I > 0$, значит, $\Delta(f_1 | f_0) > 0$. Можно также непосредственно проверить, что функционал удельной информации (1.10) имеет локальный минимум при $f_0 = f_1$ с ограничениями

$$\int_a^b dx f_j(x) = 1, \quad f_j(x) > 0, \quad (j=0, 1). \quad (1.11)$$

Если мы имеем дело с частным случаем гауссовских распределений

$$f_j(x) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_j^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2} (x - h_j)^2 / \sigma_j^2\right], \quad (1.12)$$

то удельная информация дается выражением

$$\Delta(f_1|f_0) = \frac{1}{2} (h_1 - h_0)^2 / \sigma_0^2 - \ln(\sigma_1 / \sigma_0) + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 / \sigma_0^2 - 1), \quad (1.13)$$

что исправляет формулу Голицына /11/, где последний член отсутствовал. Наш результат (1.13) всегда положителен, как и должно быть, если не выполняется одновременно $h_1 = h_0$ и $\sigma_1 = \sigma_0$.

Формулы (1.10) и (1.13) могут быть строгим основанием для широких общих рассуждений относительно философии эстетического восприятия /7, 11, 17/. Однако мы оставим этот вопрос в стороне, продолжая изложение модели звукорядов.

2. ДИССОНИРОВАНИЕ ПАРЫ ГАРМОНИК

В данном разделе мы рассмотрим взаимодействие между двумя элементарными стимулами, которое даёт в результате информационную меру их взаимного влияния и противоречия. В нашем случае элементарными стимулами являются гармоники музыкальных тонов. Они представляются как вероятностные распределения в перцептивном пространстве высот. Это представление формируется на более низких уровнях, в которые мы углубляться не будем.

Высота звука измеряется логарифмом частоты гармоник: логарифмические шкалы появляются уже на уровне ощущения. Удобно пользоваться двоичным логарифмом, выбирая единицу измерения высот равной интервалу октавы.

Мы описываем распределения гауссовскими кривыми (1.12), потому что, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, это предельное распределение для суммы достаточно большого числа любых малых флуктуаций. Таким образом, именно это распределение скорее всего будет сформировано на более низких уровнях.

Центр распределения h_j — положение его максимума — определяет высотную локализацию гармоник, а дисперсия σ — расплывчатость воспринятого образа. Не следует смешивать эту размазку ни с физической дисперсией внешнего звука, ни с физиологическим пределом разрешения высот δ . В зависимости от цели, восприятие может быть настроено на любую более грубую шкалу $\sigma > \delta$. Дисперсия σ определяется конкретным уровнем восприятия (раздел 5 и далее), и мы считаем её одинаковой на данном уровне для всех гармоник.

В описании взаимодействия элементарных стимулов мы следуем идеям Голицына /11/. Два стимула играют различные роли: один — $f_0(x)$ с центром h_0 , “старый” — является началом отсчёта, а другой — $f_1(x)$ с $h_1 = h_0 + R$, “новый” — сравнивается с ним. Сначала образуется смесь стимулов

$$F(x) = (1 - \mu) f_0(x) + \mu f_1(x) \quad (2.1)$$

с небольшим весом $\mu \ll 1$. В результате смешивания максимум распределения (2.1) сдвигается по отношению к старому центру на

$$r = \mu R \exp(-\frac{1}{2} R^2 / \sigma^2) + O(\mu^2) \quad (2.2)$$

в точку $h = h_0 + r$. Человек стремится представить сложный стимул (2.1) в стандартном виде (1.12). Простейший способ добиться этого — последовать за сдвигом центра (2.2) и получить в результате гауссовское распределение $f(x)$ с новым центром в точке h и дисперсией σ , как и у всех гармоник. Информационная мера новизны f по сравнению с f_0 вычисляется по формуле (1.13):

$$\Delta(f|f_0) = \frac{1}{2} r^2 / \sigma^2 = \frac{1}{2} \mu^2 (R^2 / \sigma^2) \exp(-R^2 / \sigma^2) + O(\mu^3). \quad (2.3)$$

Мы видим, что информация, отвечающая изменению старого образа вследствие появления нового стимула, определяется величиной

$$d(R) = (R^2 / \sigma^2) \exp(-R^2 / \sigma^2), \quad (2.4)$$

а параметр смешивания μ даёт лишь несущественный общий множитель.

Величина (2.4) называется диссонированием для пары гармоник. Она имеет максимум при $R=\sigma$, когда расстояние между стимулами равняется их размазке. Тривиальные ($R \ll \sigma$) или слишком удалённые сигналы ($R \gg \sigma$) не несут информации. Функция (2.4) является чётной, $d(-R)=d(R)$, поэтому несущественно, который из стимулов был выбран в качестве старого, а какой в качестве нового: эффект диссонирования является взаимным.

3. Функция диссонирования для составных тонов

Наиболее сильное предположение, которое мы делаем, — это гипотеза об аддитивности: диссонирование для сложного сигнала с дискретным спектром даётся суммой диссонирований всевозможных пар отдельных гармоник пропорционально их амплитудам. Такая линейность связана с определённым выбором уровня восприятия /1/. Использование гипотезы аддитивности оправдывается также результатами, которые мы получаем с её помощью.

Следует отметить одно ограничение, которое необходимо для самосогласованности гипотезы аддитивности: либо отдельные гармоники должны быть физиологически хорошо различимыми $R \gg \delta$, либо их взаимное диссонирование $d(R)$ должно быть пренебрежимо малым, с тем чтобы эффект был эквивалентен одной гармонике с суммарной амплитудой. Это приводит к условию $\delta \ll \sigma$: дисперсия, с которыми мы имеем дело, не могут приближаться к физиологическому пределу.

В отличие от шумов, музыкальные звуки обладают естественным рядом обертонов с частотами $n\eta$ ($n=1..N$), где η — частота основного тона.

Внутренний образ тона включает набор амплитуд $\{t_n\}^N$ для N воспринимаемых гармоник. Мы называем этот набор внутренним тембром. Его ни в коем случае не следует непосредственно отождествлять с физическим спектром внешнего звука, который сильно преобразуется в процессе сенсорной деятельности /1, 18/. Конкретные значения N и $t_n \geq 0$ (управляемые высшими уровнями восприятия) фиксированы для всех тонов на выбранном уровне. Мы не рассматриваем граничные эффекты крайне высоких и низких звуков, а также не включаем фазы гармоник.

Рассмотрим интервал h , составленный из двух сложных тонов с различными основными частотами $\eta_1 = 2^h \eta_0$. Согласно гипотезе аддитивности, диссонирование для этого сигнала будет состоять из двух вкладов. Один происходит от взаимного диссонирования гармоник различных тонов

$$\Delta(h) = \sum_{m, n=1}^N t_m t_n d[h + \log_2(m/n)]. \quad (3.1)$$

Другой представляет диссонирование гармоник каждого звука между собой. Этот последний вклад не зависит от величины интервала и равняется $\Delta(0)$. Таким образом, величина (3.1), называемая функцией диссонирования, содержит полную информацию о диссонировании составных тонов.

Функция (3.1) даёт первичное описание музыкального звукоряда. Как только тембр $\{t_n\}^N$, дисперсия σ и начало отсчёта (тоника) зафиксированы, минимумы $\Delta(h)$ определяют множество тонов — ступеней звукоряда, которые образуют некую целостность по отношению к тонике. С другой стороны, появление звуков вблизи максимумов функции диссонирования может означать, что целостность становится неадекватной, и привести к процессам более высокого уровня по перестройке звукоряда — изменению тоники, дисперсии или тембра, чтобы приспособиться к новому положению.

В принципе, на рассматриваемом здесь уровне параметры $\{t_n\}^N$ и $\sigma \gg \delta$ могут быть произвольными. Мы могли бы пробовать различные комбинации, выбирая наиболее подходящие для описания известных музыкальных явлений. Фактически, это было сделано. Однако существуют и теоретические

критерии более высокого уровня, чтобы указать наиболее предпочтительные, стационарные значения параметров, которые отражают естественные тенденции настройки восприятия. Последующее изложение можно рассматривать как построение параметров высшего слоя в смысле работы /19/.

4. КРИТЕРИЙ СТАЦИОНАРНОСТИ ТЕМБРА

Известно, что человеческий мозг является нелинейной системой. В процессе обработки данных воспринимаемый сигнал подвергается множеству нелинейных преобразований /1, 2/. В результате, например, слышны комбинационные частоты, которые равны суммам и разностям частот физического спектра. Эти факты заставляют нас полагать, что только те тембры могут быть фундаментальными, которые не разрушаются под действием нелинейных преобразований, являются устойчивыми к их воздействию.

С внутренним тембром $\{t_n\}^N$ мы связываем периодический (во времени T) сигнал

$$F(T) = \sum_{n=1}^N t_n \cos(2\pi n \eta T). \quad (4.1)$$

Частота основного тона η может быть здесь произвольной. Существенный в формуле (4.1) выбор фаз всех гармоник равными нулю обсуждается ниже. Рассмотрим нелинейное преобразование простейшего вида — квадратичное Q , которое создаёт новый сигнал по правилу

$$F(T) \xrightarrow{Q} F^2(T). \quad (4.2)$$

Разложение квадрированного сигнала по гармоникам

$$F^2(T) = \sum_{n=0}^{2N} q_n \cos(2\pi n \eta T) \quad (4.3)$$

включает комбинационные частоты с амплитудами

$$q_n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} t_m t_{n-m} + \sum_{m=1}^{N-n} t_m t_{n+m}, \quad (n=1 \dots 2N), \quad (4.4)$$

а постоянная составляющая в (4.3) $q_0 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N t_m^2$ измеряет интенсивность первоначального сигнала (4.1).

Чем "ближе" $\{q_n\}$ (4.4) к $\{t_n\}$, тем более стационарен тембр. Чтобы сравнивать тембры, мы используем величину

$$\tau = \left(\sum_{n=1}^N q_n t_n \right)^2 \left(\sum_{n=1}^{2N} q_n^2 \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^N t_n^2 \right)^{-1}. \quad (4.5)$$

Она имеет смысл квадрата косинуса угла между q и t в (бесконечномерном) векторном пространстве со скалярным произведением

$$(q, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n t_n. \quad (4.6)$$

Иными словами, τ -критерий (4.5) измеряет относительную интенсивность той части вектора q , которая пропорциональна t , в то время как другая часть — искажение — ортогональна. В теории высотных классов аналогичный критерий применялся для сравнения классов /20/.

Для любого $\{t_n\}^N$, $0 \leq \tau < 1$. Если $\tau = 0$, преобразованный тембр $\{q_n\}$ не имеет ничего общего с исходным $\{t_n\}$. Наоборот, если τ приближается к единице, квадратичное преобразование (4.2) создаёт тембр, почти совпадающий с оригиналом. Более того, если бы искажение вообще отсут-

вовало, $\tau=1$, тембр был бы устойчивым к нелинейности любой степени, а не только к квадратичной. Тембры с большими τ называются стационарными.

Выбор нулевых фаз в формуле (4.1) в некотором смысле соответствует "ситуации наихудшего положения". При этом выборе интенсивность комбинационного сигнала (4.3) наибольшая: все вклады в (4.4) неотрицательны, и нет никаких сокращений, которые могли бы возникнуть при специальном подборе фаз.

После введения критерия стационарности мы можем поставить задачу о поиске наиболее стационарных тембров, называемых τ^N -тембрами, которые имеют максимальное τ , возможное при данном числе гармоник N . Задачу можно решить численно; результаты представлены в таблице 1, где тембры нормированы на единичную интенсивность,

$$(t, t) = \sum_{n=1}^N t_n^2 = 1, \quad (4.7)$$

в согласии с видом скалярного произведения (4.6). Амплитуды гармоник t_n плавно убывают с ростом n , причём зависимость весьма напоминает гауссовский закон (1.12).

Полученные тембры позволяют нам рассчитать функцию диссонирования при различных значениях дисперсии. В качестве примера на рисунке 1

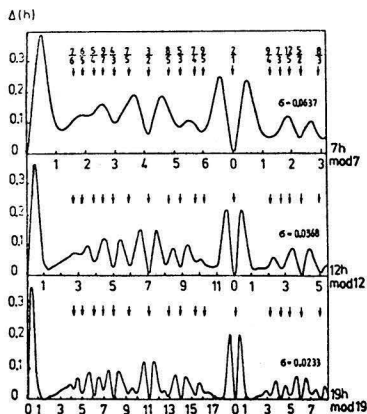


Рис. 1

показаны кривые $\Delta(h)$ с $\sigma=0.0233$, 0.0368 , 0.0637 для τ^{12} -тембра. Наблюдаются отчётливые минимумы для "гармонических" интервалов с простыми соотношениями частот, причём более "острое" σ даёт более детальную картину.

Важный факт, однако, состоит в том, что узкие интервалы типа диатонической секунды не могут быть как следует описаны при помощи τ -тембров даже при большем числе гармоник N . Это одна из причин поиска других принципов высокого уровня для отбора тембров, к которому мы переходим, помня о необходимости всё время придерживаться достаточно стационарных тембров.

ТАБЛИЦА 1. τ^N -тембры

τ^7	τ^9	τ^{12}	τ^{15}	τ^{19}	τ^{25}	τ^{30}	τ
0.9037	0.9162	0.9259	0.9313	0.9355	0.9391	0.9409	t
0.5478	0.4884	0.4267	0.3836	0.3422	0.2995	0.274	t_1
0.5042	0.4629	0.4131	0.3754	0.3375	0.297	0.2724	t_2
0.4395	0.4238	0.3919	0.3624	0.3299	0.293	0.2698	t_3
0.3603	0.374	0.364	0.3451	0.3196	0.2875	0.2662	t_4
0.2741	0.3166	0.3306	0.3239	0.3069	0.2806	0.2616	t_5
0.1884	0.2554	0.2931	0.2995	0.2919	0.2724	0.2562	t_6
0.11	0.1937	0.2528	0.2725	0.275	0.263	0.2499	t_7
	0.1348	0.2112	0.2436	0.2565	0.2524	0.2428	t_8
	0.0815	0.1697	0.2136	0.2367	0.2409	0.235	t_9
		0.1296	0.183	0.2158	0.2286	0.2265	t_{10}
		0.0921	0.1526	0.1943	0.2155	0.2174	t_{11}
		0.0581	0.1231	0.1724	0.2017	0.2078	t_{12}
			0.095	0.1506	0.1875	0.1977	t_{13}
			0.0688	0.1289	0.173	0.1872	t_{14}
			0.0449	0.1079	0.1582	0.1763	t_{15}
				0.0877	0.1434	0.1652	t_{16}
				0.0686	0.1286	0.1539	t_{17}
				0.0507	0.114	0.1426	t_{18}
				0.0343	0.0997	0.1311	t_{19}
					0.0857	0.1197	t_{20}
					0.0723	0.1084	t_{21}
					0.0594	0.0973	t_{22}
					0.0473	0.0864	t_{23}
					0.0358	0.0758	t_{24}
					0.0252	0.0655	t_{25}
						0.0556	t_{26}
						0.0461	t_{27}
						0.0371	t_{28}
						0.0286	t_{29}
						0.0206	t_{30}

5. Фурье-спектр диссонирования. Оптимальные тембры

Рассмотрим теперь функцию диссонирования (сформированную на основе какого-то тембра $\{t_n\}^N$ и дисперсии σ) как самостоятельный объект восприятия. Разумно допустить, что восприятие структуры $\Delta(h)$ предполагает выделение её различных ритмических (периодических в пространстве высот) компонент. Математически это осуществляется при помощи преобразования Фурье

$$\Delta(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dh \exp(-2\pi i \nu h) \Delta(h), \quad (5.1)$$

$$\Delta(h) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp(2\pi i h\nu) \Delta(\nu).$$

Максимуму модуля Δ (5.1) в точке ν отвечает ритм у $\Delta(h)$ с ν ступенями на октаву.

Гипотеза аддитивности и структура ряда обертонов приводят к конкретному виду Фурье-спектра (5.1) для функции диссонирования (3.1): он распадается на два множителя $\Delta = \Delta_{\sigma} \Delta_{\epsilon}$,

$$\Delta_{\sigma}(\nu) = \sigma \sqrt{\pi} (1/2 - \pi^2 \sigma^2 \nu^2) \exp(-\pi^2 \sigma^2 \nu^2), \quad (5.2)$$

$$\Delta_{\epsilon}(\nu) = \left| \sum_{n=1}^N \exp(2\pi i \nu \log_2 n) \right|^2. \quad (5.3)$$

Довольно неожиданно σ -фактор (5.2) в точности совпал с фильтром $\nu^2 G$, введённым Марром /10/ из общих соображений. Мы видим, что суть ритмической структуры звукоряда содержится в тембр-факторе (5.3). Применяя к нему фильтры (5.2) различного масштаба, мы можем подчеркнуть тот или иной конкретный ритм. Пользуясь Фурье-спектром, можно проанализировать тембры на наличие ритмов, которые имеет смысл выделять. Такой анализ τ -тембров немедленно обнаруживает явно предпочтительные звукоряды, хорошо известные в теории музыки. Но, чтобы раскрыть эти звукоряды в их полном развитии, мы вводим понятие оптимального тембра.

Основным принципом является регулярность: хороший звукоряд должен иметь ярко выраженный ведущий ритм. Поэтому мы максимизируем модуль Фурье-спектра по параметрам нашей модели, поддерживая нормировку тембра (4.7). Регулярность не тождественна требованию строго равномерной температуры; другие ритмы, помимо ведущего, не устраняются и не подавляются, если они не уменьшают главный Фурье-максимум. Не ограничиваемся мы заранее и целым числом ступеней на октаву, требуя её идеальной "чистоты": ν остаётся вещественным параметром локальной максимизации.

Регулярность звукоряда может быть количественно оценена амплитудой главного Фурье-максимума $|\Delta(\nu)|$. Параметр дисперсии входит только в фильтр (5.2). Максимизируя его амплитуду, мы находим

$$\sigma = \pi^{-1} \sqrt{(2+\sqrt{3})/2} / \nu. \quad (5.4)$$

При таком выборе весь σ -фактор обратно пропорционален ν . Поэтому $\Delta_{\epsilon}(\nu)/\nu$ — показатель регулярности, который надо максимизировать по ν .

Математическая задача о поиске максимума выражения вида (5.3)

$$\phi = \left| \sum_{n=1}^N t_n \exp(i\alpha_n) \right|^2 \quad (5.5)$$

по параметрам $t_n \geq 0$, ограниченном условием (4.7), при фиксированных вещественных α_n и заданном N имеет избыточное самосогласованное решение. Ненулевые (активные) амплитуды равны

$$t_n = A \cos(\alpha_n - \alpha), \quad (n \in \{n\}); \quad (5.6)$$

нормировка (4.7) определяет A , а α должно быть средней фазой на подмножестве активных гармоник $\{n\}$,

$$\sqrt{\phi} \exp(i\alpha) = \sum_{(n)} t_n \exp(i\alpha_n). \quad (5.7)$$

В этих предположениях можно проверить, что вариация ϕ (5.5) по $\{t_n\}$ пропорциональна вариации нормировки (4.7); это обеспечивает условный экстремум. Решение уравнений (5.6), (5.7) и (4.7) для α , ϕ и A имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha = s / \left(c + \sqrt{c^2 + s^2} \right), \quad \phi = A^{-2} = \frac{1}{2} \left(N_a + \sqrt{c^2 + s^2} \right), \quad (5.8)$$

где $\frac{c}{s} = \sum_{(n)} \frac{\cos(2\alpha_n)}{\sin(2\alpha_n)}$, а N_a — число активных гармоник. Всё, что нужно сделать для поиска максимального ϕ , это проверить все подмножества $\{n\}$ с помощью (5.8) и (5.6) на согласованность: $\cos(\alpha_n - \alpha) > 0 \Leftrightarrow n \in \{n\}$.

Теперь мы можем начать построение оптимальных тембров. Для любого выбранного ритма ν и числа гармоник N мы рассчитываем $\alpha_n = 2\pi\nu \log_2 n$ и ϕ (5.8). Затем выполняется тонкая подстройка ν , чтобы добиться наибольшего ϕ/ν . Историческое развитие звукорядов шло в направлении обострения σ — то есть увеличения ν , (5.4), — и одновременно к освоению высших обертонов — большим N . Начиная с $\nu=1$, $N=2$, мы разрешаем две новых гармоники для каждого нового звукоряда, обрезая на конце гармоники, остающиеся неактивными. Таким образом возникает последовательность оптимальных тембров ν^N (таблица 2: показаны только достаточно стационарные тембры с $\tau \geq 0.5$). Прежде чем подробно обсуждать эти результаты, мы поднимемся ещё на один уровень восприятия структуры звукоряда.

6. ОБРАЗОВАНИЕ ЗВУКОРЯДНЫХ ЗОН

До сих пор мы не дали строгого определения ступени звукоряда. Не вполне очевидно, является ли какой-нибудь минимум функции диссонирования достаточно выраженным, чтобы представлять существенный элемент звукоряда. Здесь мы дадим ответ на более корректный вопрос об определении зон для данного $\Delta(h)$, в пределах которых любой звук представляет одну и ту же согласованную с тоникой сущность, а звуки за пределами зон являются диссонансами. Предлагаемый механизм сопоставления с локально определённым средним уровнем описывает результат приспособления восприятия к постоянно воспроизводимому образу.

Принадлежность тона h к зоне определяется через функцию диссонанса, зависящую от первичного диссонирования:

$$\sigma(h) = \Delta(h) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Delta(x) f^{(h, \lambda)}(x). \quad (6.1)$$

Интеграл представляет локальное среднее с гауссовским весом (1.12), где центр и дисперсия равны h и λ . Пока диссонирование ниже локально среднего уровня, $\sigma(h) < 0$, тон попадает в зону. Формула (6.1) выглядит очень просто в терминах фурье-спектра (5.1):

$$\tilde{\sigma}(\nu) = [1 - \exp(-2\pi^2 \lambda^2 \nu^2)] \tilde{\Delta}(\nu). \quad (6.2)$$

В принципе, объём локального усреднения λ может быть независимым параметром. Однако мы полагаем его равным дисперсии всех стимулов $\lambda = \sigma$. Выбор $\lambda \gg \sigma$ будет лишь вычитать постоянную составляющую из Δ , оставляя зависимость от h неизменной. Наоборот, $\lambda \ll \sigma$ почти сократит Δ , оставив очень маленькую функцию диссонанса $\alpha(h)$, пропорциональную второй производной $\Delta(h)$, так что любой перегиб будет образовывать зону. Таким образом, наш выбор, основанный на σ -универсальности, представляется разумным. По построению, зоны одного фиксированного уровня никогда не пересекаются. Изменение ширины зон и их возможное пересечение /3/ следует приписать перепутыванию уровней с различными значениями σ .

Из формулы (6.2) с $\lambda = \sigma$ мы видим, что лишь фильтр $\bar{\Delta}_\sigma$ заменяется на

$$\bar{\alpha}(\nu) = \sigma \sqrt{\pi} [1 - \exp(-2\pi^2 \sigma^2 \nu^2)] (1/2 - \pi^2 \sigma^2 \nu^2) \exp(-\pi^2 \sigma^2 \nu^2), \quad (6.3)$$

а тембр-фактор остаётся неизменным. Оптимальная дисперсия для ζ ступеней на октаву теперь определяется максимизацией по σ формулы (6.3) при $\nu = \zeta$:

$$\sigma = \pi^{-1} \sqrt{C/2} / \zeta, \quad C^2 - 4C + 1 = (3C^2 - 6C + 1) \exp(-C), \quad (6.4)$$

где больший корень уравнения $C = 3.86397323465432$ заменяет $2 + \sqrt{3}$ по сравнению с формулой (5.4).

Чтобы настроиться на оптимальный звукоряд, мы выбираем оптимальный тембр (что определяет ритм ν) и дисперсию (6.4) согласно $\zeta = \nu$. Тогда функция диссонанса $\alpha(h)$ реализует наиболее выраженный звукоряд с ν ступенями на октаву.

Однако восприятие может и не концентрироваться столь сильно, чтобы всё время придерживаться основного звукоряда. Оно может расслабиться, позволяя более широкую дисперсию σ , то есть фильтруя более медленный эффективный ритм (меньшее число ступеней) $\zeta < \nu$. Таким путём могут проявиться подструктуры звукоряда разных уровней. Естественно, необходимым условием является присутствие ζ -ритма в тембр-факторе (5.3).

Одновременно может происходить обрезание излишних высших гармоник, чтобы сэкономить усилия по их различению на более низких уровнях вос-

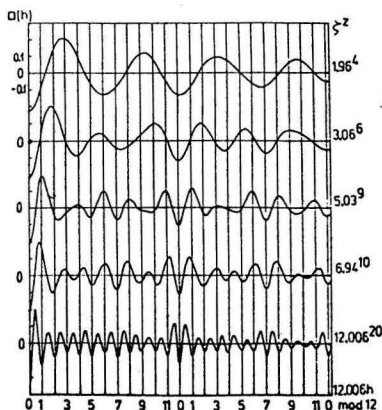


Рис. 2

приятия. Наиболее вероятным для подструктуры с ζ ступенями является редукция до числа гармоник Z , которое соответствует существующему оптимальному тембру ζ^2 . Это также улучшает регулярность

$(t, t)^{-1} \Delta_c(\zeta)/\zeta$ и подавляет шумовой фон $\Delta(0)$ для подструктуры. Таким образом, ζ^2 -редукции образуют систему вложений в основной звукоряд ν^N .

Пример на рисунке 2 показывает графики функции диссонанса для звукоряда 12^{20} и его редукций к 7^{10} , 5^9 , 3^6 и 2^4 (ζ и ν округлены до целых). Дальнейшее обсуждение кривых в связи с понятием звуковысотного контекста предостoit в разделе 8.

7. ТЕМБРЫ И ЗВУКОРЯДЫ

Мы рассчитали оптимальные тембры до $\nu \leq 75$. В таблице 2 представлены все оптимальные тембры с $\tau \geq 0.5$ вплоть до $\nu = 22$ и единственный тембр с $\tau \geq 0.6$ при больших ν . Наблюдается отчётливая корреляция между стационарностью τ и регулярностью ϕ/ν для оптимальных тембров. Мы видим также, что лишь "октавные" тембры с близким к целому числу ступеней на октаву достаточно стационарны, чтобы быть заметными в музыкальном восприятии. Небольшой дефект октавности тем не менее всегда присутствует, но он укладывается в пределы зон, хотя и доходит иногда до 40% от $1/\nu$. Наименьший дефект октавности обнаруживается при $\nu = 10$ и 12. Тетраорды и гексаорды не могут возникнуть этим путём, поскольку они являются скорее фрагментами, чем полными звукорядами, а их ритмическая структура всё же принадлежит какому-то октавному звукоряду.

Оптимальные тембры, как правило, состоят из "блоков" гармоник с примерно равными амплитудами, которые разделены "дырками" или изолированными гармониками. По аналогии с речевой акустикой /1/ будем называть такие блоки формантами. Мы обнаруживаем, что музыкальное качество звукоряда зависит от формантной структуры его оптимального тембра. Как и в речевом восприятии, наиболее существенны первая и вторая форманты. Интервалы между гармониками первой форманты показывают, из каких интервалов звукоряда можно составить благозвучные аккорды, поэтому мы говорим о первой форманте как о "гармонической". Длина гармонической форманты коррелирует с богатством гармонии в звукоряде, и музыкальный слух развивается в направлении всё более сложных аккордов. Самыми бедными являются аномальные звукоряды, в которых гармонией может быть только октава. Гармоническая форманта из четырёх гармоник даёт квинтовые звукоряды, где гармоническим интервалом становится также квинта (и кварта); эти звукоряды всё же слишком бедны для современного музыкального мышления. Терцовые звукоряды, с шестью гармониками в первой форманте, вводят в гармонию терцию, чего в большинстве случаев вполне хватает. Однако наиболее интересная гармония достигается в гармонических звукорядах, где первая форманта содержит больше шести гармоник. Только в этих звукорядах гармония может свободно использовать септиму и секунду.

Интервалы, генерируемые в пределах второй форманты (ходы) и через её отношение к первой форманте (скачки), являются характерными интервалами лада, поэтому мы называем вторую форманту ладовой. Когда господствуют гармонические интервалы, строй является гармонически лабильным, так что любой аккорд может выполнять централизующую роль, и музыка теряет возможность более глобальной тональной организации. Противоположный случай, когда преобладают ладовые интервалы, приводит к ладовой лабильности — слабой фиксации тональности в любой мелодической последовательности. В обоих случаях построение высших иерархических уровней музыкальной организации крайне затруднено. Это свойство может применяться для создания специфических колористических или стилистических эффектов, однако, как правило, оно ограничивает практическое использование звукоряда /21/.

ТАБЛИЦА 2. Оптимальные темпы с $\tau \geq 0.5$

4	6	7	9	11	12	14	15	N
1.9622	3.0407	3.8809	5.0138	6.0246	6.9428	8.1129	8.9324	ν
0.7312	0.7275	0.6617	0.6718	0.536	0.7248	0.5234	0.611	τ
1.701	1.366	1.163	1.423	1.228	1.249	0.9123	0.9336	ϕ/ν
0.5466	0.4897	0.4648	0.3743	0.3666	0.3353	0.3625	0.3457	t ₁
0.5382	0.4814	0.3915	0.3722	0.3664	0.3328	0.2354	0.3235	t ₂
0.4023	0.1796	0.2098	0.3559	0	0.3338	0.2759	0.1725	t ₃
0.4996	0.4418	0.109	0.3674	0.3575	0.2879	0	0.2437	t ₄
	0.4661	0.4584	0	0.3638	0.2063	0.2415	0	t ₅
	0.2893	0.4405	0.3646	0	0.3345	0.3675	0.281	t ₆
		0.4132	0.3296	0.2994	0	0.1186	0.2971	t ₇
			0.3598	0.34	0.2062	0	0.1206	t ₈
			0.2979	0.3155	0.332	0	0	t ₉
				0.3676	0.2879	0.3637	0	t ₁₀
				0.177	0.3269	0.3071	0.2929	t ₁₁
					0.2925	0.2818	0.3394	t ₁₂
						0.3511	0.3193	t ₁₃
						0.3167	0.344	t ₁₄
							0.2892	t ₁₅
17	19	20	22	23	25	26		N
9.9943	11.0209	12.0063	12.9647	13.8934	15.0397	15.9196		ν
0.6306	0.5421	0.6479	0.5616	0.5708	0.6056	0.5426		τ
1.007	0.9628	1.139	0.9227	0.9095	0.8827	0.7899		ϕ/ν
0.3115	0.3062	0.2704	0.2881	0.2747	0.2739	0.2701		t ₁
0.313	0.3064	0.2704	0.2864	0.2529	0.2612	0.2756		t ₂
0.209	0	0.2667	0	0.2647	0.1577	0		t ₃
0.3142	0.3014	0.2699	0.2707	0.1219	0.2323	0.2121		t ₄
0.038	0	0.1909	0.2151	0	0.2492	0.2814		t ₅
0.2004	0	0.2647	0	0.2667	0.2082	0.0907		t ₆
0.2741	0.2764	0	0	0.2732	0.0313	0		t ₇
0.3149	0.2911	0.2691	0.2416	0	0.189	0.0957		t ₈
0	0.2728	0.2539	0.2222	0.2501	0	0		t ₉
0.0492	0	0.1983	0.2523	0.1077	0.2699	0.2552		t ₁₀
0	0.2305	0	0.1897	0.2298	0.2663	0.2067		t ₁₁
0.1915	0	0.2623	0	0.1536	0.2459	0.2086		t ₁₂
0.3149	0.0403	0	0.2884	0	0	0.2712		t ₁₃
0.2795	0.2915	0	0	0.2558	0	0		t ₁₄
0.2841	0.2941	0.2229	0	0	0.0318	0.0134		t ₁₅
0.3152	0.2758	0.2678	0.2008	0	0.134	0		t ₁₆
0.2244	0.299	0.243	0.2889	0.1252	0	0.2091		t ₁₇
	0.2889	0.25	0.2575	0.276	0	0		t ₁₈
	0.1036	0.2704	0.2475	0.266	0.2195	0		t ₁₉
		0.2054	0.2772	0.2457	0.2739	0.1653		t ₂₀
			0.2793	0.2623	0.249	0.2771		t ₂₁
			0.137	0.2809	0.2417	0.2737		t ₂₂
				0.2078	0.2645	0.2625		t ₂₃
					0.2684	0.2744		t ₂₄
					0.1644	0.2784		t ₂₅
						0.1999		t ₂₆

Таблица 2. Оптимальные тембры с $\tau \geq 0.5$ (продолжение)

28 17.0311	30 18.1164	31 18.939	36 22.0135 ...	50 30.9714 ...	N ν
0.5814	0.5065	0.6692	0.6391	0.646	τ
0.993	0.7509	0.9636	0.8441	0.8457	ϕ/ν
0.2421	0.2621	0.2296	0.2319	0.1945	t_1
0.2419	0.2415	0.2301	0.2308	0.1947	t_2
0.2411	0	0.2231	0.1818	0.155	t_3
0.2324	0.0976	0.1972	0.2279	0.1888	t_4
0	0.2682	0.2339	0.1726	0.1763	t_5
0.2427	0.0655	0.2334	0.1933	0.1738	t_6
0.0717	0.112	0.0723	0.0751	0.1902	t_7
0.2141	0	0.1358	0.2235	0.1767	t_8
0.2396	0	0.2138	0.049	0.0689	t_9
0	0.1729	0.2205	0.1588	0.1584	t_{10}
0.1996	0	0	0.128	0.1056	t_{11}
0.2351	0.2244	0.21	0.2035	0.1869	t_{12}
0.2429	0.2711	0.1764	0	0	t_{13}
0.1154	0.2482	0.1503	0.0934	0.1792	t_{14}
0	0	0.2314	0.2318	0.1942	t_{15}
0.1877	0	0.0547	0.2174	0.159	t_{16}
0	0.2707	0	0.2305	0	t_{17}
0.2431	0	0.2339	0.0681	0.1004	t_{18}
0	0.2339	0	0	0	t_{19}
0	0	0.1752	0.1439	0.1354	t_{20}
0.0623	0	0.0472	0	0.1851	t_{21}
0.2227	0	0	0.1112	0.1333	t_{22}
0.2398	0.2281	0	0	0.1452	t_{23}
0.2186	0.2687	0.1561	0.2122	0.1941	t_{24}
0.2165	0.2303	0.2325	0.0287	0.1072	t_{25}
0.236	0.205	0.2211	0	0	t_{26}
0.2377	0.2194	0.2019	0	0	t_{27}
0.1547	0.2576	0.2065	0.1111	0.1624	t_{28}
	0.2655	0.2278	0.2177	0	t_{29}
	0.1644	0.2279	0.23	0.1949	t_{30}
		0.1482	0.2146	0	t_{31}
			0.2098	0.1361	t_{32}
			0.2217	0.0029	t_{33}
			0.2319	0	t_{34}
			0.2006	0.1397	t_{35}
			0.0866	0.1288	t_{36}
				0	t_{37}
				0	t_{38}
				0	t_{39}
				0.108	t_{40}
				0.1845	t_{41}
				0.1933	t_{42}
				0.1743	t_{43}
				0.1567	t_{44}
				0.1536	t_{45}
				0.1662	t_{46}
				0.1862	t_{47}
				0.195	t_{48}
				0.1657	t_{49}
				0.0763	t_{50}

Замечая, что количество гармонических и ладовых интервалов равняется $N(N-1)/2$ и $M(M-1)/2+MN$, соответственно, где N и M — длины гармонической и ладовой формант, мы можем оценить лабильность строя величиной

$$L = \ln \frac{M(M-1)+2MN}{N(N-1)} \quad (7.1)$$

Большое положительное L указывает на ладовую, а отрицательное — на гармоническую лабильность. Хорошо уравновешенные тембры с $|L| < 1$ приводят к стабильным строям, которые могут применяться наиболее универсально, если их оптимальный тембр допускает достаточно развитую иерархию вложений звукорядов. Отметим, что τ -тембры, как и оптимальные тембры с $\nu=2, 3, 4$, имеют лишь одну форманту и, значит, являются абсолютно гармонически лабильными, что связано с отсутствием в их звукорядах узких интервалов. Среди звукорядов с малыми ν отметим ладово лабильные строи $\nu=7$ и $\nu=5$, которые соответствуют хорошо известным диатонике и пентатонике. Как и следовало ожидать, пентатоника является квинтовым строем и имеет лишь 2^2 -гармонию кварт и квинт. Диатоника — терцовый строй и допускает (мажорное и минорное) трезвучия.

Первый универсальный звукоряд появляется при $\nu=12$ ($L=0.49$). Это терцовый строй, так что есть некоторые трудности с септимой и секундой в диатонических аккордах. Но богатая иерархия вложений (рисунок 2) делает его весьма гибким инструментом музыки. Далее идут звукоряды с $\nu=14, 15, 19, 22$. Строй $\nu=14$ квинтовый и притом имеет довольно слабую стационарность. Полная мажоро-минорная система $\nu=15$ изредка упоминается в музыкальной литературе, но слабая седьмая гармоника делает её почти терцовой, и мало что нового появляется по сравнению с 12-тоновой системой. Весьма стационарным и стабильным ($L=0.42$) является строй с $\nu=19$, который можно рассматривать как гармоническое обобщение терцового строя $\nu=12$. Более развитая иерархия вложений (рисунок 3) выделяет его перед $\nu=22$. При больших ν лишь

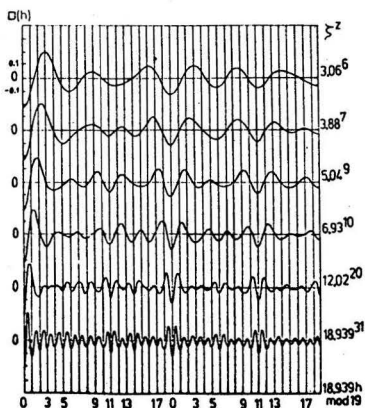


Рис. 3

тембр 31^{50} обладает стационарностью $\tau \approx 0.6$, сравнимой с 12^{20} и 19^{31} . Число гармоник больше 50-ти трудно для восприятия хотя бы из-за ограниченности абсолютного частотного диапазона, поэтому $\nu=31$ скорее всего является верхним пределом числа ступеней звукоряда. Однако сам

строй $\nu=31$ довольно интересен с музыкальной точки зрения и заслуживает более тщательного изучения.

Высшие гармоники обычно концентрируются в обширной "хроматической" форманте, которая отвечает за различие узких интервалов. Основной звукоряд становится тем самым более чётко выраженным, точно так же как высшая "певческая форманта" гóлоса делает вокальное исполнение более артикулированным. Слишком длинная хроматическая форманта может, однако, привести к хроматической лабильности звукоряда, то есть к лёгкому уходу от любой музыкальной структуры через узкие интервалы. С другой стороны, если максимальный хроматический ход будет слишком коротким, то некоторые ладовые ходы окажутся без хроматических аналогов. Кроме того, для хроматической стабильности минимальный хроматический ход должен быть достаточно узким, чтобы хроматическое изменение ступени не меняло её функции. К хроматически стабильным относятся строи с $\nu=10, 12, 17, 19, 22, 31$.

8. Звукорядная иерархия и музыкальный контекст

Функция диссонанса, происходящая от оптимального тембра с определённым ν , содержит также ритмы, отличные от главного (ν ступеней на октаву). Как только основной звукоряд закрепится в восприятии, человек начинает различать более тонкие его особенности, настраиваясь на разные присутствующие в нём ритмы. Фурье-спектр функции диссонанса (5.3) \times (6.3) показывает, какие звукоряды можно таким образом вложить в основной, с оптимальным тембром $\{t_n\}$. Наша модель указывает путь такой перенастройки восприятия: оставляя неизменными t_n , мы выбираем дисперсию согласно критерию (6.4) с $\zeta \neq \nu$. Может произойти также естественная редукция тембра, как описано в разделе 6. Функция диссонанса, отвечающая новому ζ , генерирует новую зонную структуру, однако же связанную с исходным ν -оптимальным тембром. Рисунок 2 показывает вложения, возможные в 12-ступенном звукоряде. Они образуют звукорядную иерархию для $\nu=12$. Эта иерархия может развёртываться по-разному. Например, могут возникнуть системы вложений $12 \supset 7 \supset 3$ и $12 \supset 7 \supset 5$. Если вложенный звукоряд гармонически лабилен, он может играть роль гармонии в основном звукоряде (вложение $\zeta^2=3^6$ в $\nu=12$). Ладово лабильное или стабильное вложение определяет возможный лад или тональность ($\zeta^2=5^9, 7^{10}$). Естественно, начало отсчёта для любого вложения не обязательно совпадать с тоникой основного звукоряда, которая указывает лишь высотное положение одного из слов музыкальной фактуры.

Подвижная иерархическая система вложений представляет в нашей модели текущий звуковысотный контекст, определяющий диссонансы и тяготения на разных уровнях. Вообще говоря, диссонанс на определённом уровне имеет место, когда звучащий в данный момент тон не попадает в пределы зон вложенного звукоряда этого уровня. Тяготения звука согласно вложению с функцией диссонирования $\Delta(h)$ могут быть оценены с помощью интеграла

$$\rho(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} \Delta(h) dh. \quad (8.1)$$

Например, в системе вложений $12 \supset 7 \supset 3$, описывающей обычную тональную музыку, существуют гармонические (уровень $\zeta=3$) и ладовые диссонансы ($\zeta=7$), которые могут быть разрешены в рамках 12-ступенного звукоряда. Есть два способа снятия напряжения: ход к ближайшему консонансу (расстояние определяется формулой (8.1)) и изменение текущей системы вложений. Оба встречаются в реальной музыке, и детальное изучение звукорядных иерархий позволяет найти выход из любого положения.

Строй $\nu=19$ (рисунок 3) допускает моделирование тональной музыки в рамках системы вложений $19 \supset 7 \supset 3$. Однако сверх того существуют "гипертональности", предсказанные Шенбергом /6/, $\zeta=12$. Некоторые из них не содержат диатоники, и нужна другая система вложений: $19 \supset 12 \supset 5$. Здесь уровень $\zeta=5$ играет роль гармонии в 12-тоновых "гиперладах". Заметим, что вложение 5^9 в звукоряд 19^{31} гармонически лабильно, тогда как пентатоника $\nu=5$ — ладово лабильный строй.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы наметили теорию, способную анализировать звукорядные явления на любом уровне музыкального восприятия. В своём статическом аспекте она описывает все существующие и возможные в будущем звукоряды в плане их музыкальной ценности и выразительных возможностей. Она также показывает, как всё более сложные звукоряды формировались в процессе увеличения числа гармоник, осознаваемых в музыкальных тонах, и перехода ко всё более тонкой настройке восприятия, связанной с дисперсией σ . Стадии развития строя воплощаются в иерархии возможных звукорядных вложений, которые прокладывают путь к ладовому и гармоническому уровням музыкального восприятия. Модель развивалась в контексте общей теории иерархий. Логика иерархического подхода и прикладные теоретико-музыкальные результаты будут представлены отдельно.

Хотя наша модель основана на истории европейской музыки, она может быть с незначительными изменениями применена к музыкальным системам, которые не столь сильно опираются на звукорядность, например, к восточным модам, рагам или к современным сериальным и алеаторическим построениям. Таким образом, мы предлагаем новый взгляд на акустические основы музыки, поднимаясь с сенсорного уровня физиологической акустики Гельмгольца к психофизике восприятия.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Гельфанд, *СЛУХ: Введение в психологическую и физиологическую акустику*. — Медицина, М., 1984.
2. *Элементы теории биологических анализаторов* (под ред. Н. В. Позина) — Наука, М., 1978.
3. Н. А. Гарбузов, *Зонная природа звуковысотного слуха*. — Изд. АН СССР, М.-Л., 1948.
4. Ben Johnston, *Proportionality and Expanded Musical Pitch Relations*. — *Persp. of New Music*, 1966, 5, pp. 112—120.
5. К. В. Квитка, *Первобытные звукоряды*. — *Избранные труды в 2-х томах*. — Т. 1, Советский композитор, М., 1971, с. 215—274.
6. А. Schönberg, *Problems in Harmony*. — *Persp. of New Music*, 1973, 11, pp. 3—23.
7. А. Моль, *Теория информации и эстетическое восприятие*. — Мир, М., 1966.
8. К. Прибрам, *Языки мозга*. — Прогресс, М., 1975.
9. А. Н. Леонтьев, *Деятельность. Сознание. Личность*. — Политиздат, М., 1975.
10. Д. Марр, *ЗРЕНИЕ: Информационный подход к изучению представления и обработки зрительных образов*. — Радио и связь, М., 1987.
11. Г. А. Голицын, *Информация и законы эстетического восприятия*. — В кн.: *Число и мысль*, вып. 3. — Знание, М., 1980.

12. H.Sonneborn, *The Well-Tempered Computer*. — Popular Computing, 1983, 3, pp. 218—224.
13. W.Stoney, *Theoretical Possibilities for Equally Tempered Musical Systems*. — In: *The Computer and Music* (H.B.Lincoln, Ed.). — Cornell Univ. Press, Ithaca-London, 1970, pp. 163—178.
14. G.C.Hartmann, *A Numerical Exercise in Musical Scales*. — Amer.J.Phys. 1987, 55, pp. 223—226.
15. E.Gagliardo, *Enneadecaphonic Music. A New System of Harmonic Tones*. — Atti dell'Accademia Ligure, 1980, 37.
16. R.B.Bernstein and R.D.Levine, *Role of Energy in Reactive Molecular Scattering: An Information-Theoretic Approach*. — Adv.At.Mol.Phys., 1975, 11, pp. 215—297.
17. А.Моль, *Социодинамика культуры*. — Мир, М., 1962.
18. Н.А.Гарбузов, *Зонная природа тембрового слуха*. — Музгиз, М., 1956.
19. E.Regener, *Layered Music-Theoretic Systems*. — Persp. of New Music, 1967, 6, pp. 52—62.
20. D.Lewin, *A Response to a Response: On PCset Relatedness*. — Persp. of New Music, 1980, 18, pp. 498—502.
21. М.Катунян, *К изучению новых тональных систем в современной музыке*. — В кн.: *Проблемы музыкальной науки*, вып. 5. — Советский композитор, М., 1983, с. 4—44.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 января 1990 года.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой.

Подписано в печать 18.01.90.

Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 1,49.

Тираж 395. Заказ 43014.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.

[*http://unism.pjwb.org/arc*](http://unism.pjwb.org/arc)



[*http://unism.pjwb.net/arc*](http://unism.pjwb.net/arc)



[*http://unism.narod.ru/arc*](http://unism.narod.ru/arc)

